Mathematik

Serie 1

Serie 1 - Lösungen

Prüfungsdauer: **150 Minuten**

Max. Punktezahl: **100 Punkte**

Bewertungshinweise:

1. Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.
2. Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze
3. Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.
4. Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.
5. Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:
   1. 1 Fehler: Abzug von 50% der maximalen Punktzahl dieses Teilschritts
   2. 2 Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt
   3. Es gibt keine halben Punkte
6. Ist bei grafischen Lösungen die zugrunde liegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion jedoch korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.

→ Als Grundlage gilt das Dokument „Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung“ vom 02.12.1998

Aufgabe 1

10 Punkte

Lösen Sie das Gleichungssystem in der Grundmenge G = IR x IR

$$\begin{array}{l|l|} \text{I} & \dfrac{18}{3x}+\dfrac{40}{2y+10}=4 \\ & \\ \text{II} & \dfrac{18}{2x}-1=\dfrac{20}{y+5} \end{array}$$

Lösungsdetail		Punkte
Definitionsmenge		
ID_x = IR \ { 0 }		1
ID_y = IR \ { -5 }		1
Berechnung der 1. Variable		
x = 3 resp. y = 5		5
Bestimmen der 2. Variablen und der Lösungsmenge		
x = 3 resp. y = 5		2
IL = {(3;5)}		1
Abzüge:	• Lösungsmenge fehlt oder formal nicht korrekt	- 1

Aufgabe 2

16 Punkte

Gegeben sind folgende Funktionen:

$$f: \; y = 2x^2 - 8x + 7$$

$$g: \; y = 2x - 5.5$$

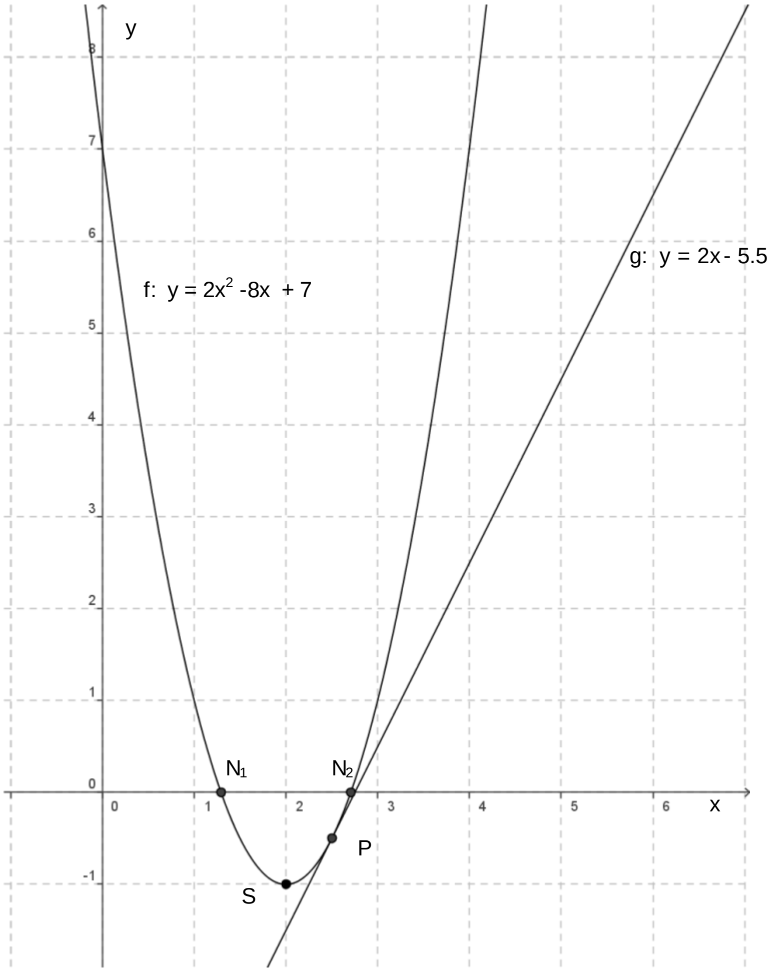
a) Bestimmen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt der Parabel.
b) Skizzieren Sie die Graphen beider Funktionen (Beiliegendes Millimeterpapier verwenden).
c) Berechnen Sie allfällige Schnittpunkte dieser zwei Funktionen.

d) Die Parabel soll nun so in y-Richtung verschoben werden, dass sie durch den Punkt P(0/0) geht.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der verschobenen Parabel. **(Keine Grafik erforderlich)**

Lösungsdetail		**Punkte**
a) Nullstellen $x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8}}{4} = 2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow$ N1 (1.29 / 0) N2 (2.71 / 0)		2
Scheitelpunkt $S_x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2 \Rightarrow S_y = -1 \Rightarrow$ S (2 / -1)		2
Abzüge:	• Punkt nicht in Koordinatenschreibweise	- 1

b) Grafische Darstellung



Parabel	4
Gerade	2

Abzüge:	• Falsches Parabelbild (Spitz, oben wieder schliessend, nicht symmetrisch, …)	max. - 2
	• Fehlende Achsenbeschriftung	- 1
	• Berechnete Punkte nicht gekennzeichnet	- 1

c) Schnittpunkte der beiden Funktionen

$$2x^2 - 8x + 7 = 2x - 5.5$$

$$2x^2 - 10x + 12.5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 2 \cdot 12.5}}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$ (Nur einen Schnittpunkt) — 2

→ y = -0.5 → P (2.5 / -0.5) — 2

Abzüge:	• Punkt nicht in Koordinatenschreibweise	- 1

d) Verschobene Parabel

Parameter c = 0 → neue Funktionsgleichung: $y = 2x^2 - 8x$ — 2

Aufgabe 3

14 Punkte

Die Firma Pic produziert Kugelschreiber und verkauft sie gemäss untenstehender Erlösfunktion (Siehe Grafik).

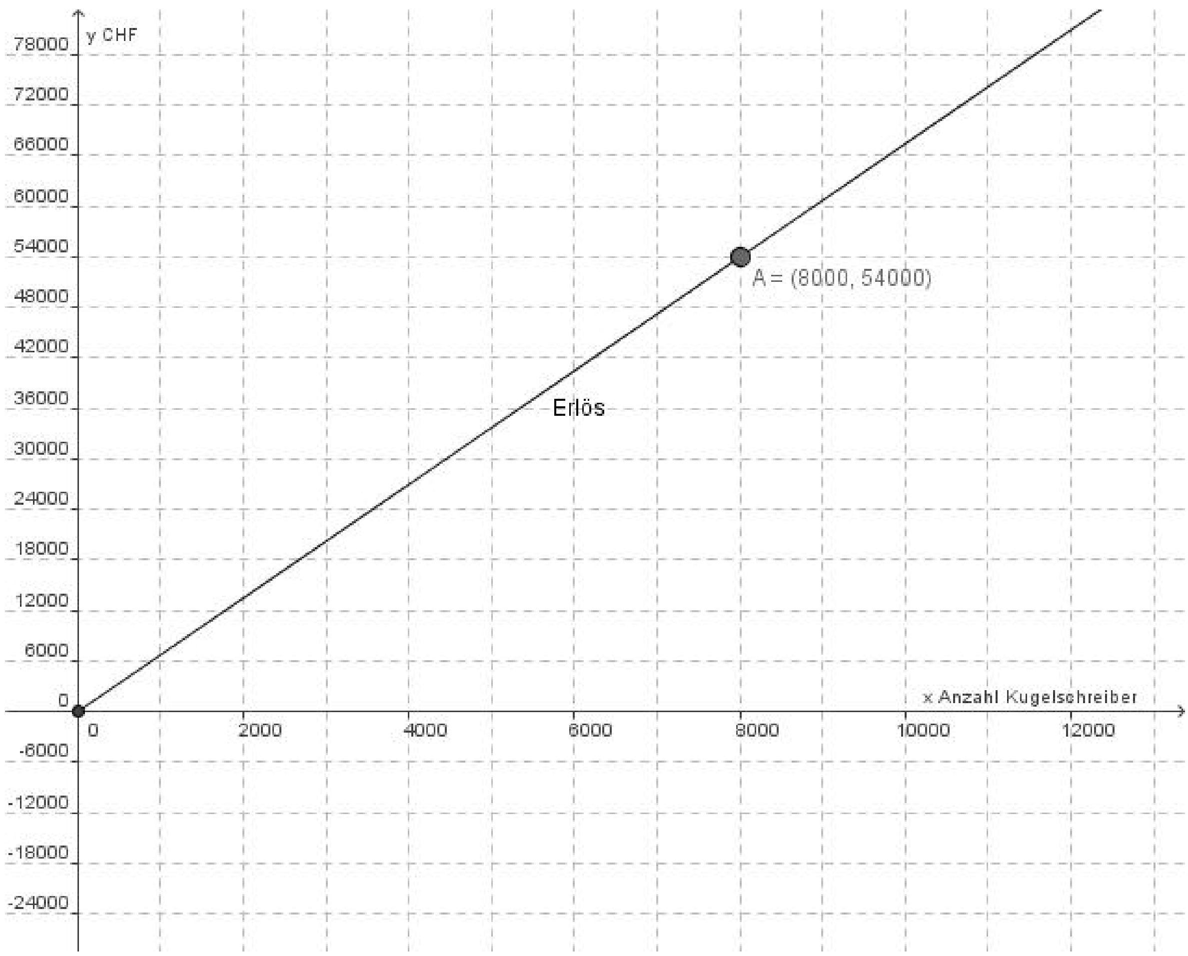
a) Formulieren Sie die Funktionsgleichung für die untenstehende Erlösfunktion.

Die Firma erzielt einen Gewinn, wenn sie mehr als 8'000 Kugelschreiber verkauft (Gewinnschwelle bei 8'000 Kugelschreibern). Werden jedoch nur 5'000 Stück verkauft, macht sie einen Verlust von CHF 6'750.-.

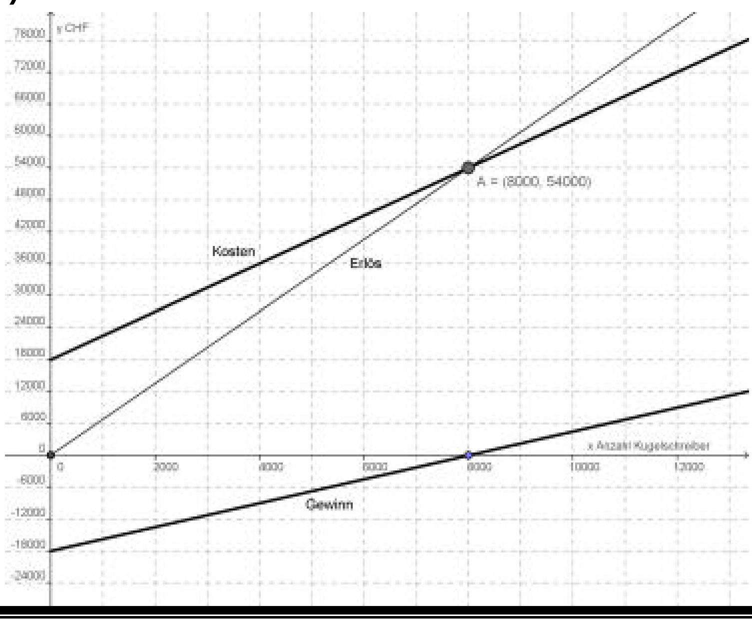
b1) Stellen Sie die Funktionsgleichung für die Gewinnfunktion auf. (nächste Seite)
b2) Stellen Sie die Funktionsgleichung für die Kostenfunktion auf. (nächste Seite)

c) Zeichnen Sie die beiden Funktionen in die untenstehende Grafik ein.

d) Neu möchte die Firma Pic im nächsten Jahr die Gewinnschwelle bereits bei 7'200 Kugelschreiber erreichen. Da die Gesamtkosten im Moment nicht gesenkt werden können, soll der Verkaufspreis erhöht werden.
Wie hoch ist der neue Verkaufspreis für einen Kugelschreiber?



Lösung Aufgabe 3)

Lösungsdetail	**Punkte**
x: Anzahl Kugelschreiber y: Erlös / Gewinn / Kosten in CHF **a) Erlösfunktion** Erlös pro Stück: Steigung $m = \frac{54'000}{8000} = 6.75$ $y_E = 6.75x$	2
b) Gewinn- und Kostenfunktion **Gewinnfunktion** Gewinn pro Stück: Steigung $m = \frac{6'750}{8000-5000} = 2.25$ Fixkosten: q = - 18'000 CHF $y_G = 2.25x - 18'000$	2
Kostenfunktion $y_K = y_E - y_G \rightarrow y_K = 4.5x + 18'000$	2
c) Grafik  **Kostenfunktion:**	2
Gewinnfunktion:	2
d) Veränderte Gewinnschwelle / Neuer Verkaufspreis Neue Gewinnschwelle: G (7200/0) Neuer Gewinn pro Stück: 0 = 7200 m - 18'000 m = 2.5 CHF (d.h. neu: 0.25 mehr) Neuer Verkaufspreis: 6.75 + 0.25 = 7.00 CHF Der neue Verkaufspreis für einen Kugelschreiber beträgt CHF 7.00.	4
Abzüge: • Fehlender Antwortsatz	- 1

Aufgabe 4

14 Punkte

a) Bei der Geburt des Sohnes der Familie Kern wurde ein Konto mit einem Startkapital von CHF 1’000.- angelegt. Der Zinssatz beim Anlegen des Kontos betrug 3.5%. Zwei Jahre nach der Geburt wurde der Zinssatz auf 3.25% gesenkt. Genau 15 Jahre nach der Geburt wurde der Zinssatz nochmals um 0.25% gesenkt.

Wie gross ist das Kapital an seinem 18. Geburtstag? (Verrechnungssteuer nicht berücksichtigen!)

b) Für die Tochter wurde ebenfalls ein Konto mit einem Startkapital von CHF 1’000.- errichtet. Der Zinssatz beträgt während 13 Jahren 3.25%.

Wie hoch müsste der Zinssatz danach sein, damit sie an ihrem 18. Geburtstag CHF 1’800.- auf dem Konto hat? (Verrechnungssteuer nicht berücksichtigen!)

c) Ihr Cousin Martin legte CHF 650.- zu einem Zinssatz 2.75% an.
Sein Bruder Adrian legte seine Ersparnisse von CHF 600.- zum selben Zinssatz doppelt so lange an. Heute haben sie gleich viel auf dem Konto. Vor wie vielen Jahren legte Martin sein Geld an?

Lösungsdetail		**Punkte**
a) Kapital am 18 Geburtstag $K_n = K_0 \cdot q_1^{n1} \cdot q_2^{n2} \cdot q_3^{n3} = 1000 \cdot 1.035^2 \cdot 1.0325^{13} \cdot 1.03^3 = 1774.039$ Das Kapital beträgt am 18. Geburtstag CHF 1774.05		4
Abzüge:	• Nicht auf 5 Rappen gerundet	- 1
	• Fehlender Antwortsatz	- 1
b) Zinssatz $q_2 = \sqrt[5]{\frac{1800}{1000 \cdot 1.0325^{13}}} = 1.035$		4
$\Rightarrow\ p = 3.5\%$ Der Zinssatz müsste 3.5% betragen		2
Abzüge:	• Fehlender Antwortsatz	- 1
c) Anzahl Jahre $650 \cdot 1.0275^n = 600 \cdot 1.0275^{2n}$		2
$\frac{650}{600} = 1.0275^n \ \Rightarrow\ n = \frac{\log 650 - \log 600}{\log 1.0275} = 2.950$ Martin legte sein Geld vor 3 Jahren an		2
Abzüge:	• Fehlender Antwortsatz	- 1
Abzüge:	• Fehlende Antwortsätze: Maximaler Abzug 2 Punkte	

Aufgabe 5

14 Punkte

a) Gärtner Kunz will im Grossmarkt Blumenzwiebeln kaufen. Die Kiste mit Tulpenzwiebeln kostet CHF 217.--. Die Kiste mit Narzissenzwiebeln kostet CHF 270.--. Die Kiste mit den Narzissen enthält 20 Zwiebeln weniger als jene mit Tulpen, wobei eine Zwiebel 10 Rappen mehr kostet. Wie viele Tulpenzwiebeln sind in der Kiste enthalten?

Stellen Sie diesen Sachverhalt in Gleichungsform dar, **ohne sie zu lösen**.

b) Gärtner Kunz geht in ein anderes Geschäft und vergleicht dort die Preise ebenfalls. Er stellt folgende Gleichung auf: (x = Anzahl Tulpenzwiebeln pro Kiste).

$$\frac{320}{x} + 0.05 = \frac{306}{x-40}$$

Wie viele Tulpenzwiebeln sind in der Kiste?

Lösungsdetail		Punkte
a) Gleichung aufstellen x = Anzahl Tulpenzwiebeln y = Preis pro Tulpenzwiebel $\frac{217}{x} + 0.1 = \frac{270}{x-20}$ oder $\left\| \begin{array}{l} x \cdot y = 217 \\ (x-20) \cdot (y+0.1) = 270 \end{array} \right\|$ ID = IN \ {20}		6
b) Berechnung einer quadratischen Gleichung $\frac{320}{x} + 0.05 = \frac{306}{x-40}$ ID = IN \ {40} $0.05x^2 + 12x - 12800 = 0$ $x^2 + 240x - 256000 = 0$ Allgemeinform: $x_1 = 400$ $x_2 = -640$ (keine gültige Lösung)		4
In der Kiste befinden sich 400 Tulpenzwiebeln Lösung:		4
Abzüge:	• Fehlender Antwortsatz	- 1
	• Fehlende Definitionsmenge	- 1
	• - 640 nicht gestrichen	- 1
	• - 640 nicht gestrichen aber richtiger Antwortsatz: volle Punktzahl	

Aufgabe 6

16 Punkte

Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

a) $a^{-2} \cdot \frac{c^{-3}}{b^{-1}c^{-5}} \cdot a^4 b^3$

Lösungsdetail	**Punkte**
$a^{-2} \cdot \frac{c^{-3}}{b^{-1}c^{-5}} \cdot a^4 b^3 = \underline{\underline{a^2 b^4 c^2}}$	2

b) $\sqrt[4]{a \cdot \sqrt[6]{a^3}}$

Lösungsdetail	**Punkte**
$\sqrt[4]{a \cdot \sqrt[6]{a^3}} = \underline{\underline{a^{\frac{3}{8}}}}$ oder $\underline{\underline{\sqrt[8]{a^3}}}$	2

c) $\dfrac{\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x}}{\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4}}$

Lösungsdetail	**Punkte**
$\dfrac{\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x}}{\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4}} = \frac{x(x-1)}{x(x-2)} \cdot \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot(x-1)} = \underline{\underline{1}}$	2

d) $\log_b\left(\sqrt{b^3}\right)$

Lösungsdetail	**Punkte**
$\log_b\left(\sqrt{b^3}\right) = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$	2

e) Lösen Sie die Gleichung auf (G = IR). Definitionsmenge nicht verlangt.

$$ax - 1 = x$$

Lösungsdetail		**Punkte**
$ax - 1 = x \qquad \mathbb{L} = \left\{\frac{1}{a-1}\right\}$		2
Abzüge:	• Fehlende Lösungsmenge	- 1

f) Lösen Sie die Gleichung auf (G = IR). Definitionsmenge nicht verlangt.

$$27^{x+2} = 81$$

Lösungsdetail		**Punkte**
$27^{x+2} = 81$ $3^{3(x+2)} = 3^4 \qquad \mathbb{L} = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$		2
Abzüge:	• Fehlende Lösungsmenge	- 1

Folgende zwei Termumformungen sind fehlerhaft. Markieren Sie jeweils den Fehler klar und korrigieren Sie diesen Umformungsschritt.

g) $\frac{(3x-3y)^2}{x-y} = \frac{3(x-y)^2}{x-y} = \underline{\underline{3(x-y)}}$

Lösungsdetail	**Punkte**
$\frac{(3x-3y)^2}{x-y} = \frac{3(x-y)^2}{x-y} = \underline{\underline{3(x-y)}}$ $\ldots\ldots = \frac{3\,(x-y)^2}{x-y} = \ldots.$	2

h) $\frac{a}{\sqrt[5]{a}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a \cdot a^{-\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a \cdot a^0 = a \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

Lösungsdetail	**Punkte**
$\frac{a}{\sqrt[5]{a}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a \cdot a^{-\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a \cdot a^0 = a \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$ $\ldots. = a \ldots.$	2

Aufgabe 7

16 Punkte

a) Eine Gemeinde plant eine Grossüberbauung mit mindestens 264 grossen und 126 kleinen Wohnungen und möchte diese so günstig wie möglich betreiben.

Das Architekturbüro plant zwei Häusertypen: Typ A (x) mit 8 grossen und 6 kleinen Wohnungen und Typ B (y) mit 24 grossen und 9 kleinen Wohnungen. Die Überbauung sollte nicht mehr als 24 Häuser umfassen, wobei aus räumlichen Überlegungen vom Typ A nicht mehr als doppelt so viele Häuser wie vom Typ B gebaut werden sollen.
Die Unterhaltskosten pro Haus belaufen sich bei Typ A auf 25'000 CHF, bei Typ B auf 50'000 CHF.

Erstellen Sie das lineare Programm **(keine Grafik).**

b) Für eine andere Gemeinde, die ein ähnliches Bauvorhaben realisieren möchte, präsentiert sich das lineare Programm wie folgt:

(1) $x = 10$
(2) $y = 8$
(3) $x = 30 – y$
(4) $15x + 12y = 300$
(5) $7x + 14y = 224$

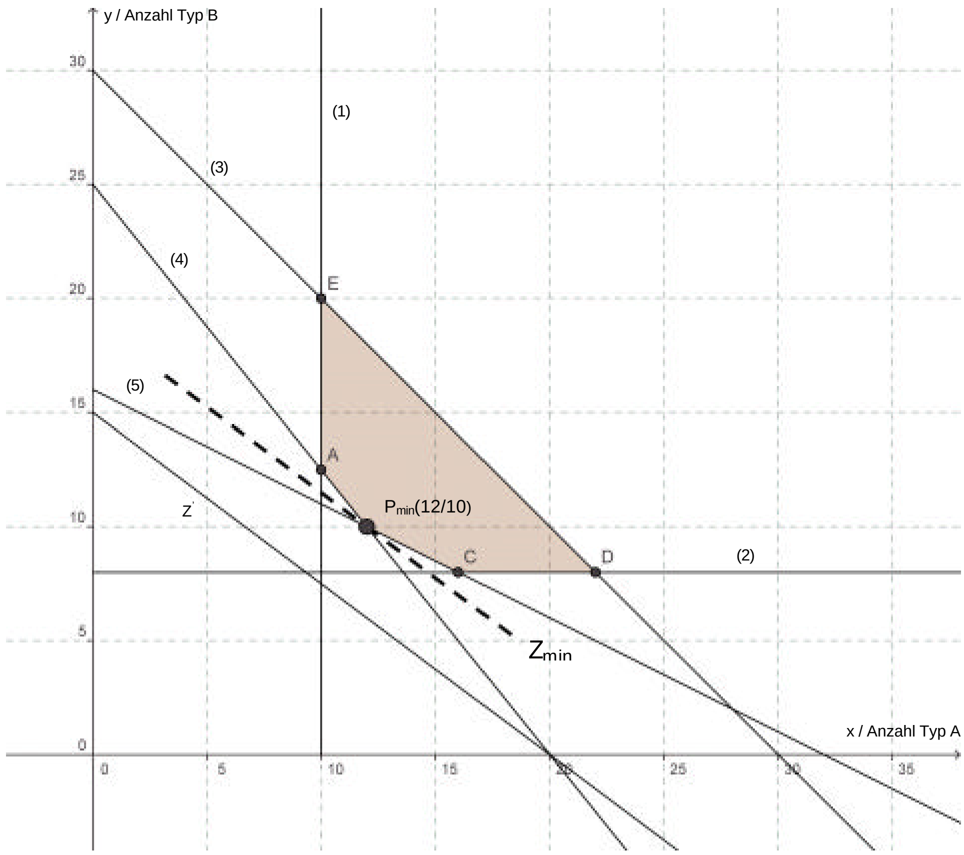
$z = 60'000x + 80'000y$

Zeichnen Sie das Planungspolygon und die Zielfunktion für die minimalen Betriebskosten. (Beiliegendes Millimeterpapier verwenden)

c) Wie viele Häuser vom Typ A und B können gebaut werden, um den Betrieb so günstig wie möglich zu führen?

Lösungsdetail	Punkte
x: Anzahl Häuser Typ A y: Anzahl Häuser Typ B	
a) Lineares Programm	
$x=0$, $y=0$	
(1) $8x + 24y = 264$	2
(2) $6x + 9y = 126$	2
(3) $x + y = 24$	1
(4) $x = 2y$	1
$z_{min} = 25'000x + 50'000y$	1

b) Planungspolygon und Zielfunktion



Pro Grenzgerade	je 1 Punkt	5
Polygon korrekt gekennzeichnet		1
Z korrekt gezeichnet daraus P_{min} bestimmt und gekennzeichnet		1

Abzüge:	• Pro fehlende Beschriftung	-1 (max. -3)

c) Minimum bestimmen

P_{min} korrekt abgelesen oder berechnet

(4) $15x + 12y = 300$

(5) $7x + 14y = 224$

$$-\frac{5}{4}x + 25 = -\frac{1}{2}x + 16$$

$$\Rightarrow \ x = 12 \quad \Rightarrow \ y = 10$$

$P_{min}(12/10)$

Es sollen 12 Häuser vom Typ A und 10 Häuser vom Typ B gebaut werden — 2

Abzüge:	• Fehlender Antwortsatz	-1